МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
цифровых технологий

________________ / Кургалин С.Д.

22.04.2024 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.О.15 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

1. Код и наименование направления подготовки:
02.03.01 Математика и компьютерные науки

2. Профиль подготовки:
математическое и программное обеспечение информационных систем и технологий

3. Квалификация выпускника:
бакалавр

4. Форма обучения: очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:
цифровых технологий

6. Составители программы:
Лобода Александр Васильевич, д.ф.-м.н, профессор кафедры цифровых технологий

7. Рекомендована:
НМС ФКН (протокол № 5 от 05.03.2024)

8. Учебный год: 2024-2025 **Семестр:** 2

9. Цели и задачи учебной дисциплины

Целями освоения учебной дисциплины являются:

– закрепление у студентов навыков строгих рассуждений;

– изучение принципов формализации логических рассуждений в связи с общематематическими проблемами и с понятием искусственного интеллекта.

Задачи учебной дисциплины:

– развитие логических и алгоритмических навыков в приложении к различным проблемам обработки и передачи информации.

10. Место учебной дисциплины в структуре ООП

Дисциплина относится к обязательной части учебного плана.

Для успешного освоения дисциплины требуются знания в объеме школьной программы по математике, а также материал и логические конструкции, излагаемые в курсах математического анализа, алгебры, дискретной математики.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности.	ОПК-1.1	Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук.	Знать: основные понятия математической логики и теории алгоритмов; идеи и принципы формализации логических рассуждений в связи с понятием искусственного интеллекта; основные направления в развитии к-значной и нечеткой логики.
		ОПК-1.2	Умеет использовать их в профессиональной деятельности.	Уметь: проверять общезначимость и выводимость формул исчисления высказываний; формулировать в символьной форме простейшие математические определения; реализовывать простейшие формальные алгоритмы в терминах машин Тьюринга.
		ОПК-1.3	Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.	Владеть: основными идеями теории алгоритмов, вычислимых и рекурсивных функций в приложении к задачам обработки информации; различными способами описания автоматных (ограниченно-детерминированных) функций и функций к-значной логики.

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час — 4/144.

Форма промежуточной аттестации: зачет с оценкой.

13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы		Трудоемкость	
		Всего	По семестрам
			2 семестр
Аудиторные занятия		68	68
в том числе:	лекции	34	34
	практические	34	34
	лабораторные		
Самостоятельная работа		76	76
в том числе: курсовая работа (проект)			
Форма промежуточной аттестации (зачет с оценкой)			
Итого:		144	144

13.1. Содержание дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК*
1. Лекции			
1.1	Детерминированные и ограниченно-детерминированные функции (ОДФ)	Вес ОДФ. Представление ОДФ при помощи деревьев, диаграмм Мура, конечных автоматов. Обратная связь. Полные системы ОДФ.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4547
1.2	Формальные аксиоматические теории	Логика высказываний (ЛВ). Общезначимые формулы ЛВ. Исчисление высказываний как формальная (аксиоматическая) теория. Формальный вывод. Полнота и непротиворечивость формальных теорий. Простейшие понятия исчисления предикатов.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4547
1.3	Элементы теории алгоритмов	Понятие и простейшие примеры машины Тьюринга. Вычислимые функции и операции с ними. Классы рекурсивных функций. Частичная рекурсивность вычислимых функций.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4547
1.4	к-значная логика	Описание функций к-значной логики при помощи формул. Полные системы функций. Замкнутые классы функций к-логики и их свойства. Особенности к-значной логики. Многочлены по модулю к; теорема Слупецкого о существенной функции.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4547
2. Практические занятия			
2.1	Детерминированные и ограниченно-детерминированные функции (ОДФ)	Вес ОДФ. Представление ОДФ при помощи деревьев, диаграмм Мура, конечных автоматов. Обратная связь. Полные системы ОДФ.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4547

2.2	Формальные аксиоматические теории	Логика высказываний (ЛВ). Общезначимые формулы ЛВ. Исчисление высказываний как формальная (аксиоматическая) теория. Формальный вывод. Полнота и непротиворечивость формальных теорий. Простейшие понятия исчисления предикатов.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4547
2.3	Элементы теории алгоритмов	Понятие и простейшие примеры машины Тьюринга. Вычислимые функции и операции с ними. Классы рекурсивных функций. Частичная рекурсивность вычислимых функций.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4547
2.4	к-значная логика	Описание функций к-значной логики при помощи формул. Полные системы функций. Замкнутые классы функций к-логики и их свойства. Особенности к-значной логики. Многочлены по модулю к; теорема Слупецкого о существенной функции.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4547

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (количество часов)			
		Лекции	Практические	Самостоятельная работа	Всего
1	Детерминированные и ограниченно-детерминированные функции (ОДФ)	8	8	18	34
2	Формальные аксиоматические теории	10	10	20	40
3	Элементы теории алгоритмов	8	8	20	36
4	к-значная логика	8	8	14	30
	Итого:	34	34	76	144

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Освоение дисциплины складывается из аудиторной работы (учебной деятельности, выполняемой под руководством преподавателя) и внеаудиторной работы (учебной деятельности, реализуемой обучающимся самостоятельно).

Аудиторная работа состоит из работы на лекциях и выполнения практических заданий в объёме, предусмотренном учебным планом. Лекция представляет собой последовательное и систематическое изложение учебного материала, направленное на знакомство обучающихся с основными понятиями и теоретическими положениями изучаемой дисциплины.

Лекционные занятия формируют базу для практических занятий, на которых полученные теоретические знания применяются для решения конкретных практических задач. Обучающимся для успешного освоения дисциплины рекомендуется вести конспект лекций и практических занятий.

Самостоятельная работа предполагает углублённое изучение отдельных разделов дисциплины с использованием литературы, рекомендованной преподавателем, а также конспектов лекций, конспектов практических занятий. В качестве плана для самостоятельной работы может быть использован раздел 13.1 настоящей рабочей программы, в котором зафиксированы разделы дисциплины и их содержание. В разделе 13.2 рабочей программы определяется количество часов, отводимое на самостоятельную работу по каждому разделу дисциплины. Большее количество часов на самостоятельную работу отводится на наиболее трудные разделы дисциплины. Для самостоятельного изучения отдельных разделов дисциплины используется перечень литературы и других ресурсов, перечисленных в пунктах 15 и 16 настоящей рабочей программы. Обязательным элементом самостоятельной работы является выполнение домашнего задания.

Успешность освоения дисциплины определяется систематичностью и глубиной аудиторной и внеаудиторной работы обучающегося.

При использовании дистанционных образовательных технологий и электронного обучения требуется выполнять все указания преподавателей, вовремя подключаться к онлайн-занятиям, ответственно подходить к заданиям для самостоятельной работы.

В рамках дисциплины предусмотрено проведение трёх текущих аттестаций за семестр. Результаты текущей успеваемости учитываются при выставлении оценки по промежуточной аттестации в соответствии с положением П ВГУ 2.1.04.16–2019 «Положение о текущей и промежуточной аттестации знаний, умений и навыков обучающихся на факультете компьютерных наук Воронежского государственного университета с использованием балльно-рейтинговой системы».

Обучение лиц с ограниченными возможностями здоровья осуществляется с учетом их индивидуальных психофизических особенностей и в соответствии с индивидуальной программой реабилитации. Для лиц с нарушением слуха при необходимости допускается присутствие на лекциях и практических занятиях ассистента, а также сурдопереводчиков и тифлосурдопереводчиков. Промежуточная аттестация для лиц с нарушениями слуха проводится в письменной форме, при этом используются общие критерии оценивания. При необходимости время подготовки на зачете может быть увеличено. Для лиц с нарушением зрения допускается аудиальное предоставление информации (например, с использованием программ-синтезаторов речи), а также использование на лекциях звукозаписывающих устройств (диктофонов и т.д.). На лекциях и практических занятиях при необходимости допускается присутствие ассистента. При проведении промежуточной аттестации для лиц с нарушением зрения тестирование может быть заменено на устное собеседование по вопросам. При необходимости время подготовки на экзамене может быть увеличено. Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата при необходимости допускается присутствие ассистента на лекциях и практических занятиях. Промежуточная аттестация для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата проводится на общих основаниях, при необходимости процедура экзамена может быть реализована дистанционно.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Рыбин, С. В. Математическая логика и теория алгоритмов : учебное пособие для вузов / С. В. Рыбин. — Санкт-Петербург : Лань, 2024. — 276 с. — ISBN 978-5-507-49166-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/405527
2	Зюзьков, В. М. Введение в математическую логику : учебное пособие / В. М. Зюзьков. — 2-е изд., испр. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 268 с. — ISBN 978-5-8114-3053-6. — Текст :

	электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/213008
3	Алябьева, В. Г. Математическая логика : учебное пособие / В. Г. Алябьева. — Пермь : ПГНИУ, 2017. — 111 с. — ISBN 978-5-7944-2904-6. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/246635

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
1	Задачи и упражнения по математической логике, дискретным функциям и теории алгоритмов / М. М. Глухов, О. А. Козлитин, В. А. Шапошников, А. Б. Шишков. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 112 с. — ISBN 978-5-507-44852-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/247400
2	Лихтарников, Л. М. Математическая логика. Курс лекций. Задачник-практикум и решения : учебное пособие / Л. М. Лихтарников, Т. Г. Сукачева. — 4-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 288 с. — ISBN 978-5-8114-0082-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/210281

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет):

№ п/п	Ресурс
1	ЗНБ ВГУ: https://lib.vsu.ru/
2	Электронно-библиотечная система "Университетская библиотека online": http://biblioclub.ru/
3	Электронно-библиотечная система "Лань": https://e.lanbook.com/
4	Электронно-библиотечная система "Консультант студента": http://www.studmedlib.ru
5	Электронный университет ВГУ: https://edu.vsu.ru/

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1	Задачи и упражнения по математической логике, дискретным функциям и теории алгоритмов / М. М. Глухов, О. А. Козлитин, В. А. Шапошников, А. Б. Шишков. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 112 с. — ISBN 978-5-507-44852-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/247400
2	Лихтарников, Л. М. Математическая логика. Курс лекций. Задачник-практикум и решения : учебное пособие / Л. М. Лихтарников, Т. Г. Сукачева. — 4-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 288 с. — ISBN 978-5-8114-0082-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/210281

17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ, электронное обучение (ЭО), смешанное обучение)

При реализации дисциплины могут использоваться технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии на базе портала edu.vsu.ru, а также другие доступные ресурсы сети Интернет.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Аудитория для лекционных занятий: мультимедиа-проектор, экран для проектора, компьютер с выходом в сеть «Интернет». Специализированная мебель (столы ученические, стулья, доска). Программное обеспечение: LibreOffice v.5-7, программа для просмотра файлов формата pdf, браузер.

Аудитория для практических занятий: специализированная мебель (столы ученические, стулья, доска).

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1	Раздел 1	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3	Контрольная работа № 1
2	Раздел 2	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3	Контрольная работа № 2
3	Раздел 3	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3	Контрольная работа № 3
4	Раздел 4	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3	Контрольная работа № 4
Промежуточная аттестация форма контроля – зачет с оценкой				Список вопросов к зачету

20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1. Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

– контрольная работа,

– текущий устный опрос.

<u>Контрольная работа № 1</u>
Ограниченно-детерминированные функции

Задание 1 (15 баллов). По заданным ограниченно-детерминированным функциям

$$f(X) = (0, x(1), 0, x(4), x(5), \dots) \text{ и } g(X) = (x(1), 1, x(2), x(4), x(5), \dots)$$

построить их суперпозицию $f(g(X))$ и определить ее вес.

Задание 2 (15 баллов). Описать функцию $f(X)$ из задания 1 при помощи дерева и усеченного дерева; построить диаграмму Мура и канонические уравнения для этой функции.

Задание 3 (20 баллов). Ввести обратную связь $O(Z_1, X_1)$ в конечном автомате

$$Z_1 = X_2 + \vec{X}_1,\ Z_2 = X_1 \vee \vec{X}_2.$$

и описать получающуюся функцию как ОДФ.

<u>Контрольная работа № 2</u>
Формальные аксиоматические теории

Задание 1 (16 баллов). С помощью теоремы о дедукции доказать выводимость (объединение посылок)

$$(A \to (B \to C)) \to ((A \,\&\, B) \to C).$$

Задание 2 (18 баллов). Предъявить список вывода для формулы

$$A \to (B \to (A \vee B)).$$

Задание 3 (16 баллов). Доказать выводимость (доказательство от противного)

$$\bar{A} \to B \ \vdash \ \bar{B} \to A\ .$$

Контрольная работа № 3
Теория алгоритмов

Задание 1 (12 баллов). Построить машину Тьюринга, переводящую начальную конфигурацию на ленте

$$q_1 1^n 0101^k \; q_1 1^n 0101^k$$

в конечную

$$q_0 1^{n-1} 0101^{k+1}.$$

Задание 2 (18 баллов). Построить примитивную рекурсию функций $f(x) = 2x$ и $g(x,y,z) = x + z$ по переменной x со счетчиком z.

Задание 3 (20 баллов). Доказать, что функция x^2 принадлежит классу $\mathrm{P}_{пр}$ примитивно-рекурсивных функций.

Контрольная работа № 4
k-значная логика

Задание 1 (16 баллов). Представить многочленом по $\mathrm{mod}\ 3$ функцию $f(x,y,z)$, такую, что $f(0,1,2) = 1$, а во всех остальных точках ее значения равны нулю.

Задание 2. (18 баллов). Представить нулевую константу из P_3 в виде формулы над

$$A = \{I_0(x), \bar{x}\}.$$

Задание 3 (16 баллов). Доказать, что одиночная функция

$$W(x,y) = (\max(x,y) + 1)\ (\mathrm{mod}, k)$$

образует полную систему в P_k.

Критерии оценивания контрольных работ

- 0-24 балла — «неудовлетворительно»
- 25-34 балла — «удовлетворительно»
- 35-44 балла — «хорошо»
- 45-50 баллов — «отлично»

Приведённые ниже задания рекомендуется использовать при проведении диагностических работ для оценки остаточных знаний по дисциплине

<u>Задания с выбором ответа</u>

№	Задание	Варианты ответа	Верный ответ
1	Сколько меток «И» содержится в последнем столбце Таблицы Истинности для формулы $(A \supset (B \supset C))$?	а) 3 б) 4 в) 5 г) 7	г
2	Сколько меток «И» содержится в последнем столбце Таблицы Истинности для формулы $(A \vee B) \supset (A \,\&\, B)$?	а) 1 б) 2 в) 3 г) 4	б
3	Чему равен вес функции $X \to (1, 0, x(2), x(3), x(4), \dots)$?	а) 1 б) 2 в) 3 г) 4	в
4	Чему равен вес функции $f(X, Y) = X + Y$?	а) 1 б) 2 в) 3 г) 4	б
5	На множестве, содержащем k элементов, является общезначимым предикат $(\exists x\, F(x)) \supset (\forall x\, F(x))$. Чему равно k?	а) 1 б) 2 в) 3 г) 4	а
6	При каком k из предложенного списка многочлены по модулю k не образуют полной системы функций?	а) 2 б) 3 в) 6 г) 13	в
7	Детерминированная функция $Z = f(X)$ задана каноническими уравнениями $z(t) = Q(t-1)$, $q(t) = X(t)$, $q(0) = 1$. Чему равен вес $f(X)$?	а) 1 б) 2 в) 3 г) 4	б
8	В общезначимой формуле $(A \,\&\, B) \ast (A \vee B)$ клякса ($\ast$) закрыла итоговую логическую операцию. Какая это была операция?	а) конъюнкция б) дизъюнкция в) импликация г) эквиваленция	в
9	Какой из знаков четырёх логических операций нужно вставить в формулу $(A \,\&\, B) \ast (A \vee B)$ вместо $\ast$, чтобы в последнем столбце ее таблицы истинности было поровну меток «И» и «Л»?	а) конъюнкция б) дизъюнкция в) импликация г) эквиваленция	г
10	Вычислить значение в точке (1,2,3) функции $f(x, y, z) = x \cdot y \cdot z + \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$ в 5-значной логике, имея в виду, что операции сложения и умножения осуществляются по модулю 5, а $\bar{x} = x + 1 (\mathrm{mod}\ 5)$.	а) 0 б) 1 в) 2 г) 4	а

Задания с кратким ответом

№	Задание	Верный ответ
1	Сколько меток «И» содержится в последнем столбце Таблицы Истинности для формулы $(A \supset B)\&C$?	3
2	Вычислить вес ограниченно-детерминированной функции $$Z = f(X) = (0, \overline{x(1)}, x(3), x(4), \dots).$$	4
3	Определено ли значение функции $g(x, y) = \mu_x(f)$ для функции $$f(x, y) = x + y + 2$$ в точке $(1, 3)$? Если определено, то в ответе указать это значение, если не определено, то в ответе написать «нет» (без кавычек).	нет
4	Имея в виду, что $N(t) = (n - 1 - t)$ – отрицание Лукашевича, найти на множестве $E_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ максимальное значение функции двух переменных $$f(x, y) = \min(N(x + y), x + 1).$$	3
5	Вычислить значение примитивной рекурсии $$h(x, y) = \Pi p(f, g)$$ для функций $f(x) = x$, $g(x, y, z) = x + 2y + 3z$, в точке $(3, 2)$, полагая счетчиком переменную y функции g.	41

Задания с развёрнутым ответом

Задание 1. С помощью теоремы о дедукции доказать выводимость

$$\vdash (A \supset (B\&C)) \supset (A \supset C).$$

Решение. В силу теоремы о дедукции (применяемой дважды), исходное задание равносильно доказательству выводимости

$$A \supset (B\&C), A \vdash C.$$

Заметим теперь, что выводимой из набора формул $\Gamma = \{A \supset (B\&C), A\}$ является любая формула этого набора, так что

$$A \supset (B\&C), A \vdash A \supset (B\&C), A.$$

Применяя далее правило Modus Ponens к двум последним выводимостям, а затем цепное правило, получим

$$A \supset (B\&C), A \vdash B\&C \vdash C,$$

что и требовалось доказать.

Критерии оценивания	Баллы
Имеется верная последовательность всех этапов решения, обоснованно получен верный ответ.	3
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом имеется верная последовательность всех этапов решения.	2
Получен верный ответ, однако имеются пропуски одного или двух этапов решения ИЛИ Решение не завершено, однако верно выполнен хотя бы один из этапов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Задание 2. Найти вес суперпозиции $f(g(X))$ для

$$f(X) = (\overline{x(1)},\ 0, x(2), x(4), \dots),\ g(X) = (0, x(1), 1, x(4), \dots).$$

Решение. Так как, начиная с 4-й секунды, обе функции работают как тождественные преобразователи (выходящий импульс равен входящему в ту же секунду), необходимо детально разобрать лишь работу суперпозиции в первые три секунды после включения. Имеем следующее формальное описание суперпозиции:

$$Z = f(g(X)) = (z(1), z(2), z(3), x(4), x(5), \dots),$$

где

$z(1) = \overline{g(1)} = \overline{0} = 1$ – импульс, вырабатываемый функцией

$$f(g(X)) = f(g(1), g(2), \dots)$$

на первой секунде;

$z(2) = 0$ и $z(3) = y(2) = x(1)$ – импульсы, вырабатываемые этой функцией на второй и третьей секундах, а через

$$Y = (y(1), y(2), y(3), \dots)$$

обозначена последовательность импульсов, вырабатываемая функцией $g(X)$.

Для итоговой суперпозиции

$$f(g(X)) = (1, 0, x(1), x(4), x(5), \dots)$$

составим список S неэквивалентных вершин на дереве, изображающем эту функцию (нумеруя вершины обычным образом поярусно, начиная от корня дерева, а на каждом ярусе слева направо: ξ_0; ξ_1, ξ_2; ...). Имеем:

$$S = \{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_5, \xi_7\}.$$

Соображения, позволяющие не включать в этот список другие вершины, становятся очевидными из чертежа дерева. Следовательно, вес обсуждаемой суперпозиции заданных функций равен числу различных вершин в списке S, то есть 6.

Критерии оценивания	Баллы
Имеется верная последовательность всех этапов решения, обоснованно получен верный ответ.	3
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом имеется верная последовательность всех этапов решения.	2
Получен верный ответ, однако имеются пропуски одного или двух этапов решения ИЛИ Решение не завершено, однако верно выполнен хотя бы один из этапов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Задание 3. Выразить в P_3 индикаторную функцию минимальной высоты $J_0(x)$ через функции системы $A = \{x - 1, x^2\}$.

Решение. Выпишем «таблицы истинности» для некоторых функций, необходимые для получения решения задачи:

x	0	1	2
x^2	0	1	1
x^2-1	2	0	0
$(x^2-1)^2$	1	0	0
$J_0(x)$	1	0	0

Две последних строки этой таблицы показывают, что с функцией $J_0(x)$ совпадает (на множестве $E_3 = \{0, 1, 2\}$) формула

$$f(x) = (x^2 - 1)^2,$$

получаемая суперпозициями двух функций из начальной системы, и являющаяся, тем самым, решением задачи.

Критерии оценивания	Баллы
Имеется верная последовательность всех этапов решения, обоснованно получен верный ответ.	3
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом имеется верная последовательность всех этапов решения.	2
Получен верный ответ, однако имеются пропуски одного или двух этапов решения ИЛИ Решение не завершено, однако верно выполнен хотя бы один из этапов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Задание 4. Построить примитивную рекурсию $\Pi p(f, g)$ пары функций

$$f(x) = x, \quad g(x, y, z) = z + 1,$$

полагая счетчиком фиктивную переменную y функции g.

Решение. По определению примитивной рекурсии, вычисляем пошаговым образом значения итоговой функции $h(x, y) = \Pi p(f, g)$, увеличивая на каждом шаге значение счетчика y на единицу:

$$h(x, 0) = f(x) = x,$$

$$h(x, 1) = h(x, 0 + 1) = g(x, 0, h(x, 0)) = h(x, 0) + 1 = x + 1,$$

$$h(x, 2) = h(x, 1 + 1) = g(x, 1, h(x, 1)) = h(x, 1) + 1 = x + 2$$

и так далее. Легко увидеть и доказать с использованием метода математической индукции, что итоговая функция двух переменных имеет вид

$$h(x, y) = x + y.$$

Критерии оценивания	Баллы
Имеется верная последовательность всех этапов решения, обоснованно получен верный ответ.	3
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом имеется верная последовательность всех этапов решения.	2
Получен верный ответ, однако имеются пропуски одного или двух этапов решения ИЛИ Решение не завершено, однако верно выполнен хотя бы один из этапов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Задание 5. Считая известным факт выводимости $B, \bar{B} \vdash A$ (для любых формул A, B), доказать, что

$$\bar{B}, A \vee B \vdash A.$$

Решение. Формула

$$(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C)))$$

– это одна из аксиом. Тогда справедлива выводимость

$$\bar{B} \vdash (A \supset A) \supset ((B \supset A) \supset ((A \vee B) \supset A))).$$

Применим здесь два раза правило Modus Ponens, удаляя последовательно из правой части две выводимые из $\overline{B}$ формулы $A \supset A$ и $(B \supset A)$.
Первая из них – теорема ЛВ, а потому она выводима, например, из формулы $\overline{B}$.

Вторая выводимость $\overline{B} \vdash B \supset A$ равносильна (по теореме о дедукции) вспомогательному утверждению $B, \overline{B} \vdash A$.

Получаемая таким образом выводимость

$$\overline{B} \vdash (A \vee B) \supset A$$

равносильна требуемому утверждению за счет еще одного применения теоремы о дедукции.

Критерии оценивания	Баллы
Имеется верная последовательность всех этапов решения, обоснованно получен верный ответ.	3
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом имеется верная последовательность всех этапов решения.	2
Получен верный ответ, однако имеются пропуски одного или двух этапов решения ИЛИ Решение не завершено, однако верно выполнен хотя бы один из этапов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

20.2. Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: перечень вопросов к зачёту.

Перечень вопросов к зачёту

1. Детерминированные функции. Примеры.
2. Выполнимые и равносильные формулы в ИП. Отрицание формулы с кванторами.
3. Описание детерминированных функций деревьями.
4. Общезначимость и общезначимость в конечном в ИП.
5. Понятие и примеры ограниченно-детерминированных функций (ОДФ).
6. Замкнутость класса $P_{выч}$ относительно операций примитивной рекурсии и минимизации.
7. Задание ОДФ усеченными деревьями.
8. Полиномы по mod k в k-значной логике.
9. Задание ОДФ диаграммами Мура.
10. Формулы исчисления предикатов (ИП). Кванторы и их использование.
11. Задание ОДФ каноническими уравнениями.
12. Аксиомы и правила вывода в ИП. Непротиворечивость ИП.
13. Суперпозиция ДФ и ОДФ.
14. Полнота (в узком и широком смыслах) исчисления высказываний.
15. Зависимость с запаздыванием. Обратная связь для ДФ и ОДФ.
16. Вычислимость частичных числовых функций. Основные примеры.
17. Понятие о конечных автоматах. Автоматы с обратной связью.
18. Отсутствие полноты в исчислении предикатов.

19. Полные системы функций в P_2, P^2, (P_{OD}, C, O).
20. Понятие машины Тьюринга: команда, программа, конфигурация.
21. Конечные базисы в (P_{OD}, C, O).
22. Применимость машины Тьюринга к слову, эквивалентность машин, примеры.
23. Формулы логики высказываний (ЛВ). Истинность и общий вид формулы.
24. Определения операций С, Пр, μ с частичными числовыми функциями.
25. Формулы ЛВ и булевские функции. Общезначимые формулы.
26. Частичная рекурсивность вычислимых функций. Формула Клини.
27. Подстановка в формулу. Сохранение общезначимости.
28. Функции k-значной логики. Реализация функций формулами.
29. Правило Modus Ponens (MP). Теоремы логики высказываний.
30. «Правильное» вычисление функций. Замкнутость класса $P_{выч}$ относительно операции суперпозиции.
31. Выводимость из списка формул Г. Свойства формул, выводимых из различных списков.
32. Классы рекурсивных функций. Простейшие связи.
33. Теорема о дедукции в исчислении высказываний.
34. Класс примитивно-рекурсивных функций. Примеры.
35. 16 основных выводимостей.
36. Понятие и примеры полных систем функций k-значной логики.
37. Полнота и непротиворечивость формальных теорий. Непротиворечивость исчисления высказываний (ИВ).
38. Операции с машинами Тьюринга: композиция, итерация, разветвление.
39. Выводимость формулы А из ее элементарных составляющих.
40. Замкнутые классы функций k-значной логики и их свойства.
41. Общезначимые формулы и «Закон исключенного третьего».
42. Правило Modus Ponens (MP). Теоремы логики высказываний.
43. Обоснование метода доказательства «От противного» $(A \supset B \Leftrightarrow \bar{B} \supset \bar{A})$.
44. Теорема Слупецкого о полноте системы функций.

Для оценивания результатов обучения на зачёте с оценкой используется 4-балльная шкала: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Дан полный, развёрнутый ответ на поставленный вопрос (вопросы), обучающийся свободно оперирует основными понятиями дисциплины, ориентируется в предметной области. Изложение материала не содержит ошибок, отличается последовательностью, грамотностью, логической стройностью.	Повышенный уровень	Отлично
Дан развёрнутый ответ на поставленный вопрос (вопросы), обучающийся свободно оперирует основными понятиями дисциплины, ориентируется в предметной области. Материал изложен в целом последовательно и грамотно, отсутствуют грубые ошибки, однако имеются отдельные неточности в определениях, вычислениях, доказательствах, изложениях положений теории.	Базовый уровень	Хорошо

Ответ на поставленный вопрос (вопросы) содержит изложение только базового теоретического материала, имеются ошибки в определениях, вычислениях, доказательствах, формулировках положений теории. Нарушена логическая последовательность в изложении материала.	Пороговый уровень	Удовлетворительно
Ответ на поставленный вопрос (вопросы) отсутствует, либо содержит грубые ошибки в определениях, вычислениях, доказательствах, формулировках положений теории. Обучающийся не владеет основными понятиями дисциплины. Отсутствует логическая последовательность в изложении материала.	–	Неудовлетворительно